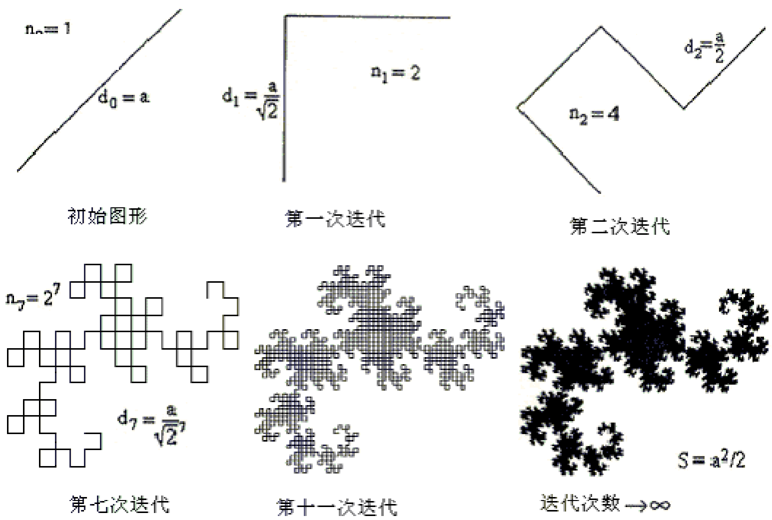
有趣的分形龙

作者：天蓉

把一条细长纸带对折，接着把对折后的纸带再对折，又再对折，重复这样的对折几十次，然后松开纸带，从纸带侧面看过去，我们得到是一条弯弯曲曲的折线。请别小看这个连小孩子都会做的游戏。从它开始，我们可以探索一连串现代科技中耳熟能详的名词：分形、混沌、蝴蝶效应、生命产生、系统科学……

我们把‘纸带对折一次’的动作，对应于几何图形中的一次‘迭代’，如刚才所描述的循环往复的‘迭代’操作所得到的最终图形叫做中国龙，或称分形龙。下图描述了分形龙曲线的生成过程：



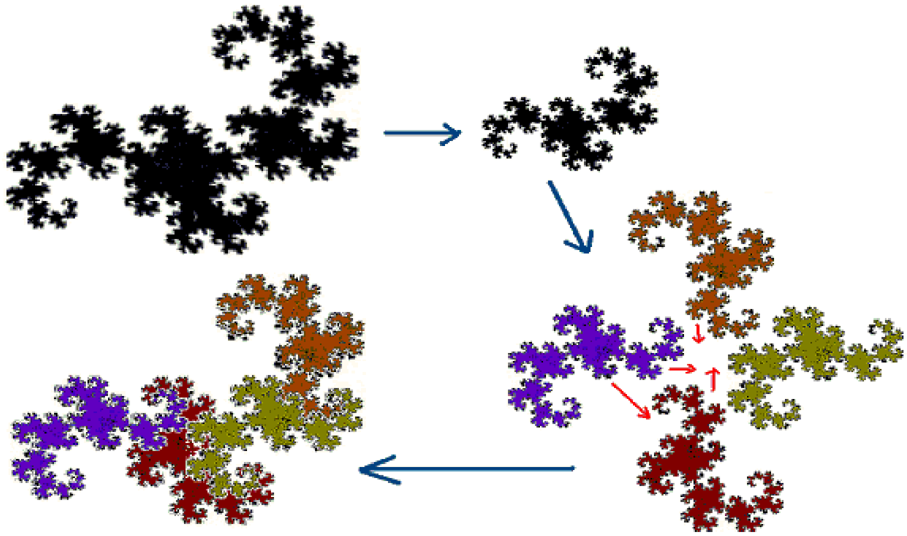
图一

仔细研究上图中分形龙的产生过程，可观察到如下三个有趣之处：

1. 简单的迭代，进行多次之后，产生了越来越复杂的图形；
2. 越来越复杂的图形表现出一种‘自相似性’；
3. 迭代次数较少时，曲线看起来是一维折线，此曲线随着迭代次数的增加而逐渐充满部分平面。

第一条特点一目了然，无需多言。

第二条的‘自相似性’是什么意思呢？那是说：一个图形的自身可以看成是由许多与自己相似的，大小不一的部分组成的。最通俗的‘自相似’例子是中国人喜欢吃的花菜，花菜的每一部分，都可以看成是与整棵花菜结构相似的‘小花菜’。分形龙曲线也具有这种‘自相似性’，从下面的图中可以看出：分形龙可以看成是由四个更小的但形状完全一样的‘小分形龙’组成的。



图二

上述的第三条特点是有关图形维数的变化：一维的折线随着迭代次数的增加，逐渐充满部分平面，看起来变成了二维图形。

谈到几何图形的‘维数’，我们不能只凭感觉了，需要更多的数学论证。

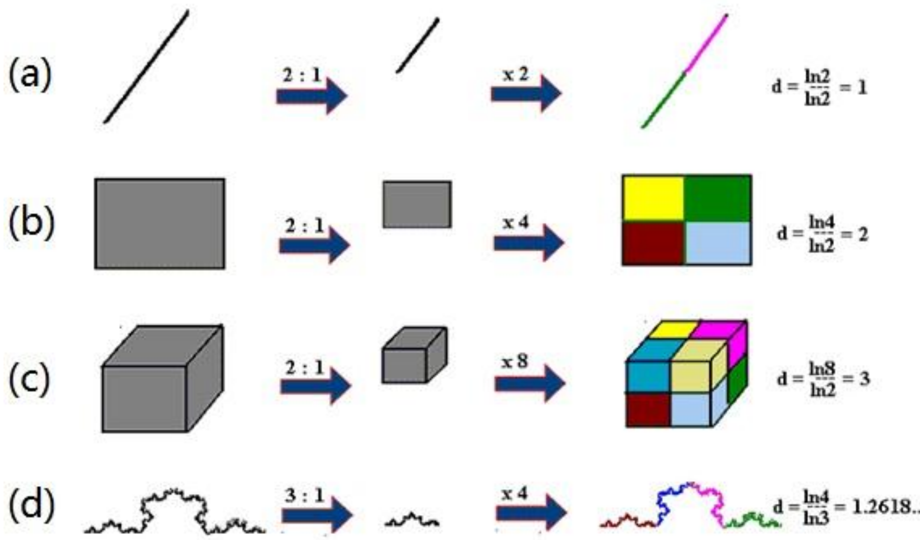
分形龙是分形的一个特例，不同的迭代方法，可以形成各种各样不同的分形，对分形的研究，形成一个新的几何分支：分形几何。

其实，在‘分形’这个名字中，就已经包含了‘分数维数’的玄机。众所周知，经典几何学中，有1维的线、2维的面、3维的体。三维以内，有现实物理世界的物体对应，容易理解，维数大于三的时候，就需要应用一点想象力了，比如加上了时间的四维空间等。但是不管怎么样，经典几何的‘维数’总是一个整数。而分形几何中的‘维数’则包含了‘分数维’，这就是‘分形’名称的来源。如何理解分数维？首先，我们从几个例子来说明这个分数维的概念。

在经典几何中，用拓扑的方法来定义”维数”，也就是说，空间的”维数”等于决定空间中任何一点位置所需要变量的数目：比如，所谓‘三维’，是因为我们需要三个数值来确定一个物体在空间的位置。对于一个二维空间，比如球面，则需要俩个数值来确定一个物体的位置。当汽车行驶在一条高速公路上，它的位置可以用一个数：出口的序号数，来表示。这是一维空间的例子。显然，按照这种拓扑方法定义的”维数”，只能是整数。

在分形几何中，我们将拓扑方法定义的‘维数’，扩展成用与自相似性有关的度量方法定义的‘维数’。刚才我们已经介绍了花菜结构和分形龙的‘自相似性’，其实，经典整数维的几何图形，诸如一条线段、一个长方形、一个立方体，也具有这种‘自相似性’，比如说，如下图所示：（a）一条线段是由两个线段接成的；（b）一个长方形，可以被对称地剪成四个小长方形，每一个都与原长方形相似；（c）一个立方体，可以被对

称地切成八个小立方体，每一个也与原立方体相似。只不过对经典几何来说，‘自相似性’显得太简单平凡了，没有什么特别的新意，我们并不重视它。

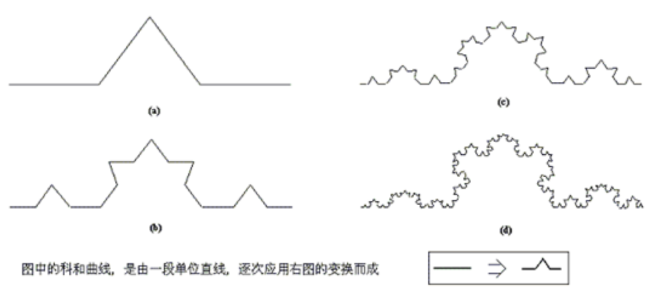


图三

不过现在，我们可以利用这种‘自相似性’，重新定义几何图形的‘维数’。

仍然利用上面的图，用自相似性来定义的‘维数’可以如此简单而直观地理解：首先将图形按照（N: 1）的比例缩小，然后，如果原来的图形 可以由（M）个缩小之后的图形拼成的话，这个图形的‘维数’d ，就等于 ln(M)/ln(N)。不难看出，将上述方法用来分析直线、平面、空间，分别得到d = 1、2、3（上图中的a、b、c）。

上图中的（d），是一种很简单的分形，叫做科和曲线，也是一种自相似图形，它的迭代生成过程如下图所示。



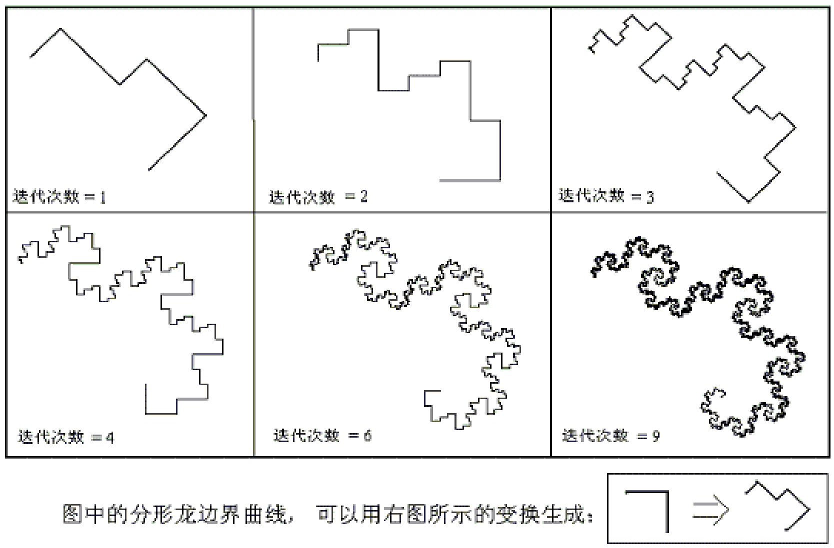
图四

可以用同样的方法分析如图（d）及上图所示的科和曲线：首先，将科和曲线的尺寸缩小至三分之一；然后，用四个这样的‘小科和曲线’，便能构成与原来一模一样的科

和曲线。因此，我们得到科和曲线的维数d = ln(4)/ln(3) = 1.2618..。这就说明了，科和曲线的维数不是一个整数，而是一个小数，或分数。

下面，我们再回头研究分形龙的维数（图二）。将图中的分形龙曲线，尺寸缩小为原来的一半之后，得到右上图的小分形龙曲线。然后，将四个小分形龙曲线，分别旋转方向，成为如右下图的位置。最后，再按照右下图中箭头所指的方向，移动四个小分形龙曲线，便拼成了左下图的、与原来曲线一样的分形龙曲线。因此，如此可以证明，分形龙曲线的维数为2，因为（d = ln(4)/ln(2) = 2）。

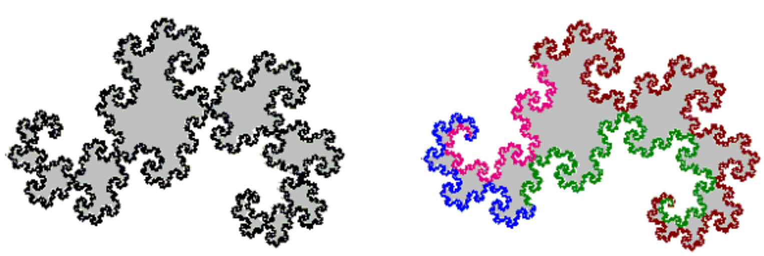
有趣的是，分形龙图形的边界也是一个可以用迭代法产生的分形：



图五

由图六可知，整个分形龙曲线的边界是由四段相似的图形组成的。这种分形的维数估算方法比较复杂一些，它的“分形维数“(d)可以通过解如下方程求得:

$$2 \times 2^{(-3/2)d} + 2^{(-1/2)d} = 1 \Longrightarrow d = 1.523627085$$



图六

通过分形龙，我们认识了分形，理解了分数维。分形几何是理解混沌概念及非线性动力学的基础，在现代科学技术中，有着广泛的应用。