图说投影

华山派小 6

1. 引子

金庸的《天龙八部》里有这样一段情节：逍遥派女子夜晚舞剑。月光通过湖面反射,将她的剑影投射到无量山石壁上。无量派祖师看到后，误以为是仙女舞剑，并从中领悟出二流的无量剑法。这个有趣的情节涉及到一个几何概念：投影。 本文的主要目的就是以尽可能直观的方式向读者介绍有关投影的数学。

2. 拍照与手影戏：三维到二维的投影例子

很多人小时候都玩过手影戏，就是把手放在灯泡前，投射到墙上的影子会随着你的手势变化产生各种有趣的图案。

你的手是三维空间中的物体，影子是二维空间（即墙面）上的几何物体。因此手影戏的本质，从几何角度说，相当于是将三维空间中的几何物体投影到二维平面中的几何物体。 与此类似的，还有拍摄照片。实际上，照片也无非是将三维空间中的物体投射到平面（即相片）上。

将三维空间中的物体被投影到平面上，往往会损失掉很多信息。比如在上述的手影戏中，如果你仅仅看墙上的影子，实际上是很难确切地判断出那是由一只手还是两只手投影出来的，或者是否真的由人的手投影出来（也可能是其他物件投影得到）。这就说明投影会损失掉原始物体的很多几何信息。我们前面提到的《天龙八部》情节也是如此，逍遥派的一流剑法投影到石壁上损失了很多信息，所以无量祖师只能领悟到信息不全的二流剑法。

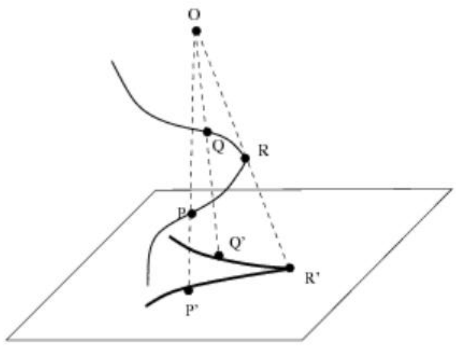
类似地，有一些利用视觉技巧拍摄的照片，让你无法正确判断相片中两个物体的大小关

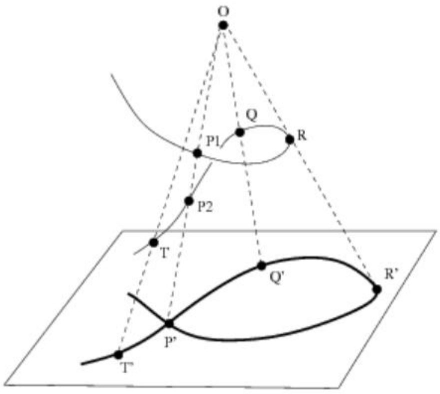
系或前后关系等等。其实背后的道理是相同的。

尽管投影会损失掉部分信息，但另一方面，它也可能保留下很多重要的信息。况且研究二维图像显然要比研究三维图像简单很多。因此很多时候，为了降低研究的难度或复杂度，我们常常采取投影的方法来降低背景空间的维度，把几何物体压缩到更低维度的空间里来加以分析。这也是为什么我们需要研究投影的一个原因。

3. 空间曲线的投影

想象一下： 你有一根光滑的绳子， 你要通过一个电灯泡将它投影到地面上，那么地面上的影子会是光滑的吗？答案通常是否定的。不但如此，绳子的影子有时甚至会出现很多复杂的“结”（几何上叫做“奇点”）。 比如下面两张图所显示的例子（O 是电灯泡所在的位置，虚线表示投影的光线）：



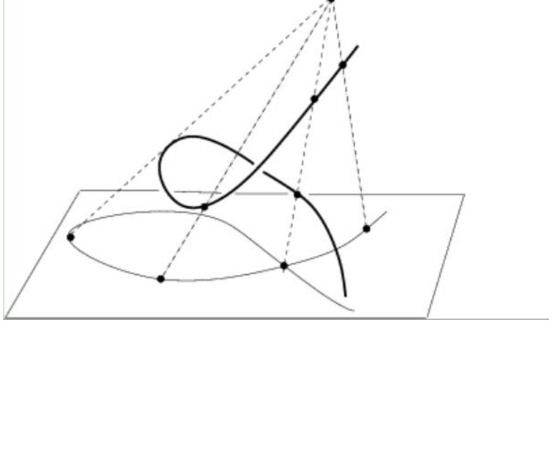


上面左图中, R 的投影点 R' 是一个奇点--通常称之为“尖点”。最简单的尖点可以用方程 $x^2+y^3=0$ 来局部地描绘，通常叫做“普通尖点”。右图中 P_1,P_2 的投影点 P' 也是奇点，它局部看有点像十字架，我们通常把它称作“结点”，可以用方程 $x^2-y^2=0$ 来局部地描绘。当然，我们还可以举出更复杂的投影图像的例子。限于篇幅，这里就不再详细介绍了。

在对一条曲线进行投影时，我们总是希望影像曲线尽可能地接近原始曲线，这样做能够尽量保留住原始曲线的几何信息。最理想的情况当然是：影子也是光滑的。 但正如前面所说，这一般是做不到的。三维空间到二维空间的压缩通常会将曲线挤压出奇点。因此我们退而求其次，允许影像曲线上出现一些奇点，但这些奇点要尽可能简单。另外我们还希望这个投影几乎是1:1的，也就是说，绳子和影像上除去若干点外，两者之间的点要一一对应。

事实上，我们知道下面的经典结论：

任何空间曲线都可以通过合适的投影映成平面上仅带有有限多个结点的曲线，而且这个投影在结点之外是1:1的。



严格地讲，这里的曲线要求是代数曲线—就是可以通过多项式方程组定义出来的曲线。不过读者可以暂时忽略这些细节。

通过上述投影，我们就能将三维空间中的曲线的大部分几何信息都保留下来。研究二维平面上的结点曲线显然要比研究空间曲线容易得多，因为平面曲线可以用一个方程描述出来，因此可以用我们熟知的平面解析几何的方法去研究它。比如说，任何一条曲线都带有一个决定其几何性状的数值量叫做“亏格”—就好比某种基因。你要直接计算空间曲线的亏格一般比较麻烦。但是通过投影之后，空间曲线的亏格计算可以被归结到平面结点曲线的亏格计算，后者是很容易的。

进一步想象一下，假如一条曲线落在更高维度的空间中，我们是否也可以将它投影到平面中呢？答案是肯定的。我们可以用数学上的手段，先将曲线通过投影压缩到三维空间中，而且我们还能保证在这种投影下，曲线的全部信息都被忠实地保留下来（改变的仅仅是背景空间的维度）。这样，我们的问题又再一次归结到三维空间曲线的投影上。无论如何，正如上面所指出的，在把三维空间压缩到二维空间的过程中，我们通常无法确保曲线不被挤压出结点。

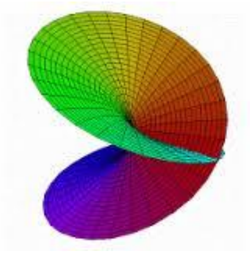
4. 举一反三：高维几何物体的投影

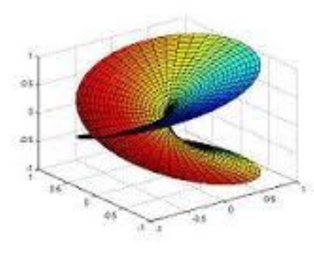
我们现在要把上一节的讨论推广到更高维度的空间中去。这当然需要一些想象力。因为高维空间本身是很难像三维空间那样被直观、清晰地理解的。 你甚至可能会有疑问：是否真的有高维空间存在？这一点倒不必有疑问，其实有很多重要的几何对象都存在于高维空间中。我们先举几个经典的直观例子来说明一下。

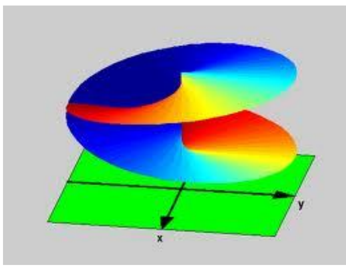
例一、 最著名的例子是克莱因瓶。 它是一个没有边界、且只有一个面的曲面。

这个瓶子的瓶颈直接插入到瓶胆内，并且与瓶底的开口连接起来。上面的照片显示的是克莱因瓶的三维模型，并不是真正的克莱因瓶。因为真正的克莱因瓶的瓶颈并不会插破瓶壁进入瓶胆内，而是直接穿越进去。这一点显然无法在三维空间中实现出来—你必须在瓶壁上凿出一个洞才能把瓶颈塞进去。实际上，克莱因瓶必须放在四维空间中才能被正确地构造出来。

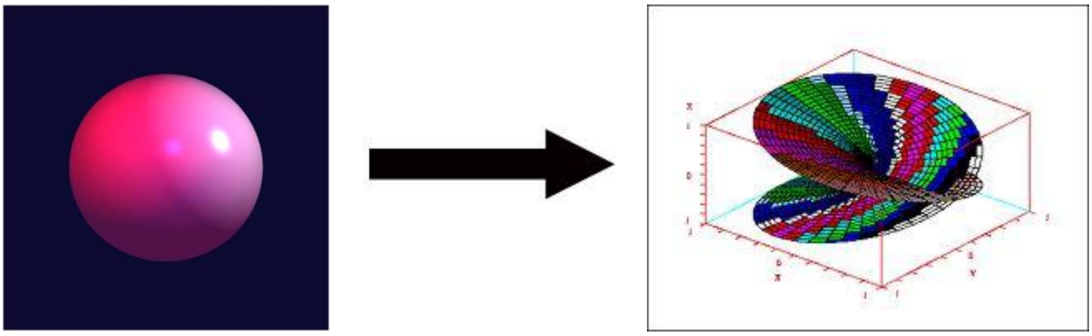
例二、 下面三张图显示的曲面看似是两个圆盘，但它们却彼此穿越对方完美连接起来。



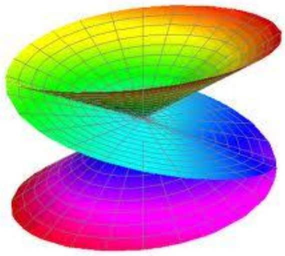




在三维空间中，让两个圆盘互相穿越对方必然会导致曲面破裂，所以这个曲面实际上也不可能在三维空间中存在，上面的图像仅仅是它在三维空间中的模拟图像。可以用数学方法证明，这种曲面存在于四维空间中，它的完整图形和球面在拓扑意义上是一样的（粗糙地说，就是你对这个曲面充气，它可以鼓成一个“气球”）。

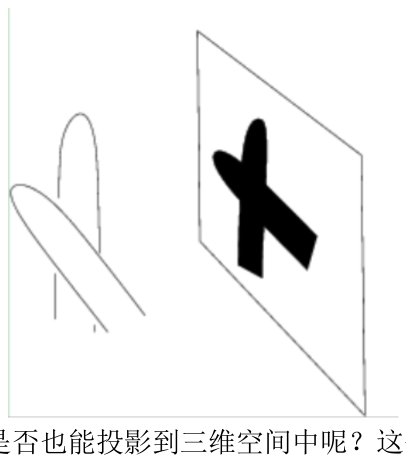


类似的曲面还有很多，比如下图的曲面是三个圆盘彼此连接起来。



这些曲面在三维空间中的模型实际上是它们从四维空间投影到三维空间得到的。这需要一些想象力。你得想象在四维空间中放一个电灯泡，然后光线把四维空间中的曲面投影到一面三维的“墙”上，那么它的影像就是我们看到的三维模型。这些模型总是会出现一部分很奇怪的“穿越缝隙”。比如克莱因瓶在三维模型中有一个凿破的“洞”供瓶颈“穿越”进内胆—这个洞在四维空间中并不存在；例二中的两个圆盘相互穿越的那条交界线其实在四维空间中也不存在。为什么会出现这种现象呢？直观上说，这是因为投影将四维空间压缩到三维空间后，会把曲面压坏掉。这就有点像是你把大房子变成了小房子，那么房子里的家具等等可能就容不下了，只能相互挤压，以至于压坏掉了一部分。

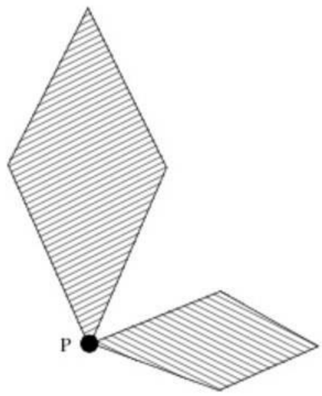
其实这种“穿越”现象在手影戏里并不罕见。试想一下，你竖起左手食指，用右手食指在左手食指后方从右至左横向移动。这个时候，在墙面上看到的影像是怎么样的呢？你会发现右手食指的影像穿越了左手食指的影像。我们之所以对这类情形的穿越现象不感到奇怪，是因为二维和三维空间可以得到正确无误的直观理解。但是前面的例子涉及四维空间，所以其中的几何图形就很难正确地构想清楚。



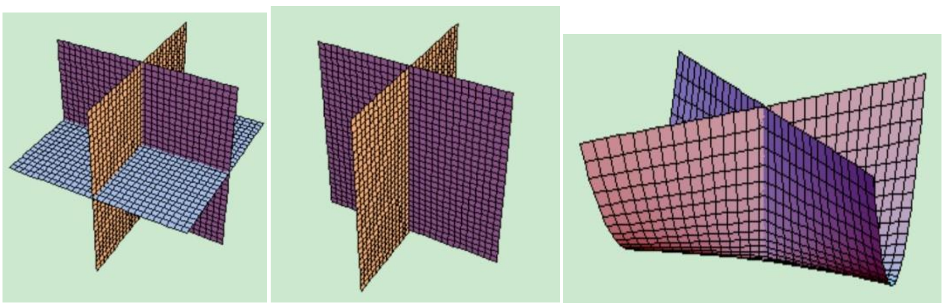
更高维度的空间中的曲面是否也能投影到三维空间中呢？这个有趣问题和曲线情形非

常类似，但有所不同。首先，这样的曲面可以很好地被投影到五维空间中。这种投影不会挤压坏曲面，唯一的改变仅仅是压缩了背景空间的维度。因此当我们把曲面投影到五维空间中，曲面所有的几何信息都能被很好地保留下来。（严格地说，这里的曲面是代数曲面，就是可以用多项式方程组定义的曲面，读者可以不去管这些细节问题。后面不再特别声明。）

五维空间到四维空间的投影一般却无法保证曲面不会被压坏。但是我们可以选择一个适当的位置放电灯泡，使得投影到四维空间的影像曲面上被挤压坏的部分是若干个点（我们把它们叫做“奇点”）且比较简单，局部都形如以下的样子。



然后我们再把这种带奇点的曲面进一步投影到三维空间中。只要灯泡位置选的适当，曲面在三维空间中的影像被压坏的部分不会太糟糕，它大致有如下三种局部情形



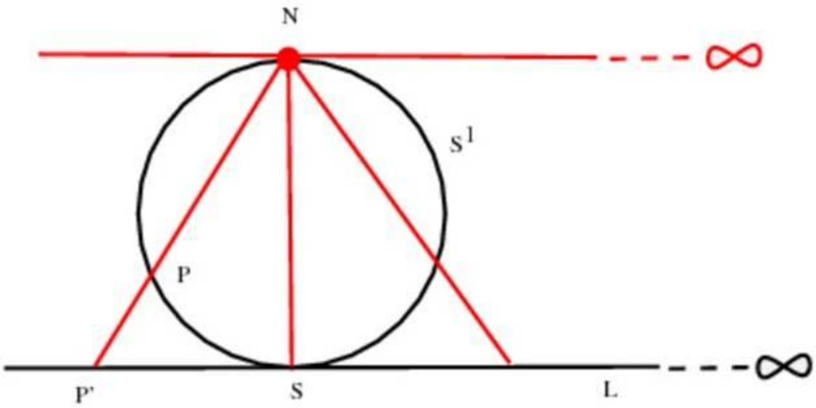
三重点　　　　*结点*　　　　*拧点*

更一般的，一个高维空间中的r维几何物体（严格地说，是指代数簇，就是用多项式方程组定义的几何图形）都可以通过投影逐步地映入到$2r+1$维空间中，该投影产生的唯一变化仅仅是压缩了背景空间的维度，并不损失几何物体的所有信息。

5. 有限投影

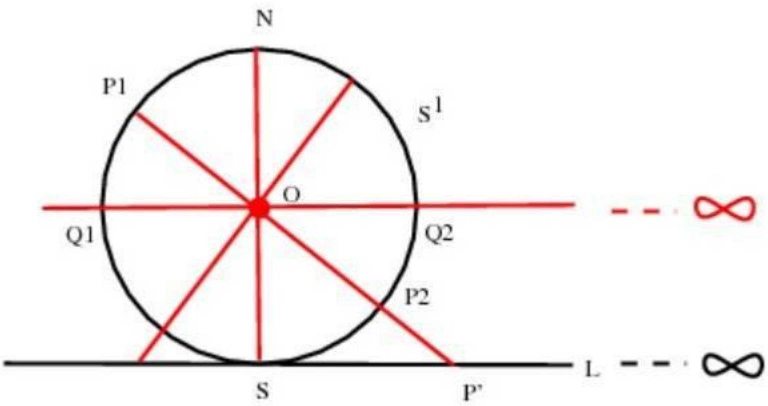
前面我们考察了如何把一条曲线投影到平面里，如果进一步把平面曲线投影到直线（一维空间）上，会有什么现象呢？这里举几个例子来看一下。

例三、 球极投影



我们在圆圈的北极点 N 放电灯泡，红颜色的直线代表光线。这个投影把圆圈上每个点(除了北极点外)唯一地投影到直线上的某个点，反之亦然。如果我们在直线外添上无穷远点 ∞，那么北极点 N 恰好对应了 ∞。这样，在上述投影上，圆圈和扩充直线间的点一一对应。

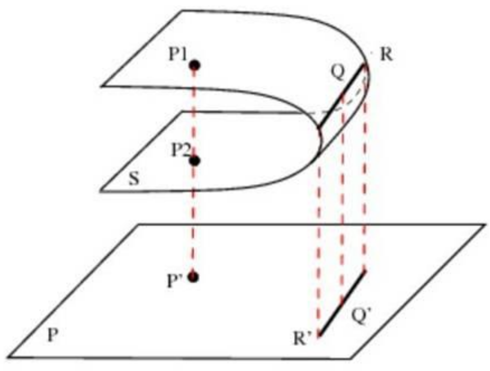
例四、 二次投影



我们把电灯泡移到圆心上，此时的投影与前一例有所不同。你会发现，圆圈上每个点和它的对径点在投影下映到同一点。因此这个投影是 $2:1$ 的，我们简称其为二次投影。

一般说来，曲线到直线（也就是一维空间）上的投影都是有限多个点映到同一个点。这种现象也可以推广到曲面情形。一个曲面也能投影到平面(二维空间)上。这里也举几例。

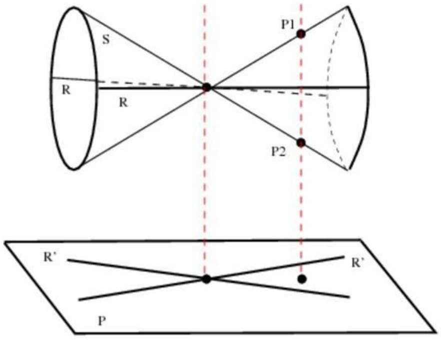
例五、 曲面的二次投影（红虚线代表光线）



对平面上的一般点（比如图中 P' 点）而言，它都是曲面上的两个点（比如 P_1 和 P_2）投影下来得到的影像。因此这个投影也称为二次投影。不过并非所有的影像点都满足这个性质。比

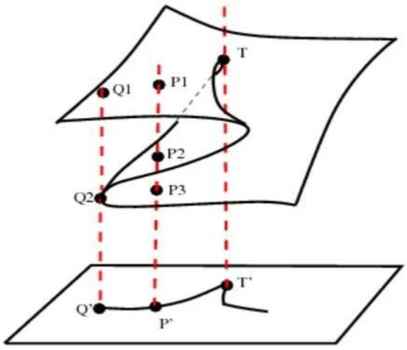
如图中直线R'每个点Q'，它只由曲面上唯一的点Q投影得到。我们通常把这种点称作“分歧点”，而把分歧点的集合R'称作“分歧轨迹”。

类似的二次投影还有



其中的分歧轨迹是两条相交的直线。

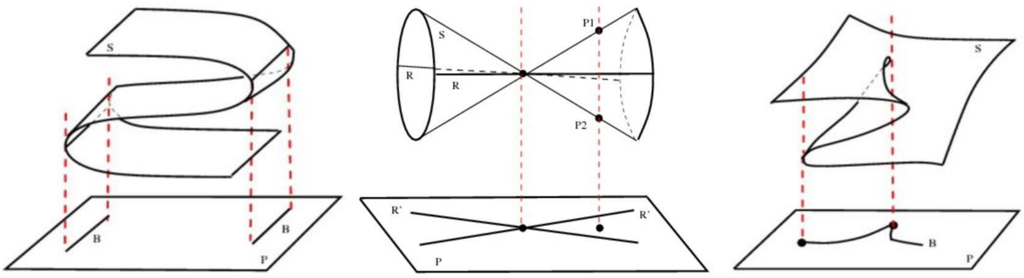
例六、 三次投影



和二次投影类似，对平面上的一般点而言，都是由曲面上三个点投影下来得到的影像。但有些点却并非如此。比如图中Q'点是由两个点Q_1和Q_2投影得到，其中在Q_1附近，这个曲面的局部投影是$1:1$的，在Q_2附近，曲面的局部投影是二次投影。T'点则由唯一的点T投影得到。这些点同样叫做分歧点，它们全体组成的集合叫做分歧轨迹。这条分歧轨迹是一条平面曲线，带有尖点T'。

一个经典的结论告诉我们：

如果我们将电灯泡放在适合的位置上，那么曲面到平面的投影可以控制得很好。具体地讲，在这样的投影下，曲面上每个点附近的局部投影要么是到$1:1$的，要么是二次投影（例五），要么是三次投影（例六）。

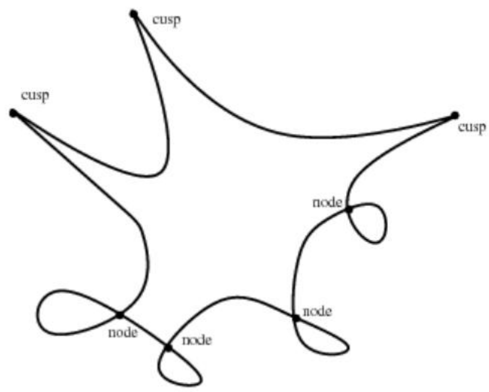


因此分歧轨迹是一条很特殊的平面曲线，它可能有一些奇点，但这些奇点要么是结点要

么是尖点（见第三节讨论）。 这种投影通常叫做一般投影。

6. 曲面一般投影的性质

我们继续上面的话题。考虑曲面到平面的一般投影。此时分歧轨迹的奇点只有尖点(cusp)和结点（node)，其他部分当然都是光滑的—就是说摸上去很滑顺，没有尖锐的部分。



一个有趣的问题是：

什么样的平面曲线才能作为某个曲面的一般投影的分歧轨迹？

这实际上是一个很困难的数学问题，它被称作黎曼的存在性问题。有许许多多数学家曾经考虑过这个问题，并且在一些情况下得到了很多漂亮的结论。比如，假设分歧轨迹有c个尖点，n个结点，并且是d次的（即由d次方程定义），人们发现如下结论：

（1） c必是 3 的倍数，n必是 4 的倍数；

（2） $d^2-6c \leq 2n < d^2-5d+8.$

黎曼存在性问题在曲线情形也有描述，并且已经有了比较完善的解答。

另一个有趣的问题是：

是否可能存在两个不同的曲面到平面的一般投影，它们具有相同的分歧轨迹？

这个问题叫做 Chisini 猜想，由 Kulikov 于 2008 年彻底解决了。他的结论是：除了几个特殊的例子之外，一般投影由分歧轨迹唯一确定；换言之，除了那几个特例外，不可能存在两个不同的一般投影，它们具有相同分歧轨迹。

这是一个很有价值的结论。因为这意味着，曲面投影的几何信息能够由平面上的一条曲线的几何信息完全确定下来。一般说来，研究曲线要比直接研究曲面方便得多。由此也可见投影的用处是很大的。

7. 结束语

这篇文章的素材改编自我的数学系青年教师论坛演讲稿。当初写这一讲稿的目的是为了让其他专业的老师也能够轻松了解代数几何的部分课题，为此特地加入了很多图片来帮助他们理解。但是要以通俗的方式介绍代数几何始终是很困难的。为了追求某种通俗性，我们不得不放弃某些严格性以及若干技术性的细节。比如我们讨论的对象是复数域上的代数簇，但是这些名词术语会让大多数人望而却步，所以我们在文章中尽可能避免这类术语，而把它们笼统地称为“曲线”、“曲面”或“高维的几何物体”等等。最后我要说明一下，文中的一些图片直接取自于百度图片库，另一些则是我自己画的。